LED-es fényforrások spektrális összetételének tervezése nagyszámú mintával és főkomponens-analízissel

– Kránicz Balázs, Hanák Barbara, Rumpler Mihály, Pfeiffer Attila –

1. Bevezetés

Az izzólámpák forgalomból történő kivonása felveti azt a kérdést, hogy mivel világítsunk a továbbiakban. Egyik lehetséges megoldás a kompakt fénycső, azonban ezeknek az eszközöknek a színvisszaadása még hagy némi kívánnivalót maga után. Hasonlóképpen van ez a fényporos fehér LED-ekkel is. Ha azonban megengedhetjük magunknak annak lehetőségét, hogy a LED-es lámpa ne csak egyetlen típusú LED-et tartalmazzon, akkor csupán néhány LED-típus megfelelő megválasztásával is kiváló tulajdonságú fényforrások készíthetők.

A LED-típusok helyes megválasztására könnyen megérthető színtani módszereket lehet kidolgozni. Ezek általában adott mintahalmazt feltételeznek, a LED-ek kiválasztására pedig megfelelő optimalizációs eljárást alkalmaznak. Az optimalizáció költségfüggvényét gyakorta az alkalmazott mintahalmazra számítható átlagos színkülönbség alapján konstruálják. Az alkalmazott mintahalmaz összeállítása örök vita tárgya, hiszen egyáltalán nem mindegy, hogy az mennyi és mennyire korreláló mintákat tartalmaz. Az optimalizáció sorozatos futtatásánál ugyanis gépidő szempontjából már egyáltalán nem hanyagolható el, hogy száz, ezer vagy tízezer mintát alkalmazunk.

2. A matematikai módszer bemutatása

Mérési adatok vagy egyéb adathalmazok kiértékelésekor a szakemberek leggyakrabban talán a valószínűségszámítás és a statisztika bevált eljárásait alkalmazzák. Ha olyan jellegű problémával találkozunk, hogy nagy mennyiségű adat áll rendelkezésünkre, ám ezek mindegyike gyaníthatóan csupán „egy maroknyi" jellemzőből áll elő, akkor célszerű főkomponens-analízist alkalmaznunk. A főkomponens-analízis nem bonyolult dolog, mégis sokszor előfordul, hogy még a legszínvonalasabb képzésben részesült szakemberek sem mindig tudják, hogyan történik, így nem csak az elméletét foglaljuk össze röviden, hanem egy egyszerű számolási feladattal is be kívánjuk mutatni azt.

2.1 Vektor valószínűségi változó főkomponensei

Az alábbi ismertetőhöz Koltay László matematikus egyetemi jegyzete szolgált alapul [1]. Az ismertető megértéséhez feltételezünk bizonyos jártasságot a valószínűségszámításban, így nem definiáljuk újból az összes közismertebb fogalmat.

Legyen $\xi : \Omega \to \mathbf{R}^p$ vektor valószínűségi változó. A ξ vektor valószínűségi változó várható értékét jelölje $E(\xi) = m \in \mathbf{R}^p$, kovarianciamátrixát pedig $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{p\times p}$. Jelölje ξ centráltját $\xi^* = \xi - m$.

A V kovarianciamátrix csökkenő sorrendbe rendezett sajátértékeit jelölje $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$. A kovarianciamátrix tulajdonságaiból következik, hogy valamennyi sajátértéke nemnegatív.

A $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortonormált rendszerét jelölje $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbf{R}^p$.

A fenti rövid összefoglaló után a ξ vektor valószínűségi változó főkomponenseinek nevezzük a $\tau_i = v_i^T \cdot \xi^* \quad i = 1,2,\ldots,p$ skalár valószínűségi változókat.

A főkomponensek rendkívül fontos tulajdonsága, hogy belőlük az eredeti valószínűségi változó lineáris kombinációval állítható elő a következő módon:

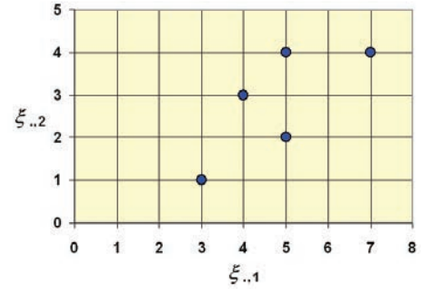
$$\xi = \sum_{i=1}^{p} \tau_i \cdot v_i + m .$$

2.2 Elemi számolási feladat bemutatása a főkomponens-analízis megértésének megkönnyítésére

Tegyük fel, hogy valamely jelenséget egy kétkomponensű vektor-valószínűségi változóval jellemezhetünk (p = 2). Legyen ez a valószínűségi változó $\xi = (\xi_{.,1}, \xi_{.,2}) \in \mathbf{R}^2$. Tegyük fel, hogy öt mérést hajtunk végre a jelenség megismerésére, amelyek eredménye a következő: $\xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}) = (3;1)$; $\xi_2 = (\xi_{2,1}, \xi_{2,2}) = (4;3)$; $\xi_3 = (\xi_{3,1}, \xi_{3,2}) = (5;2)$; $\xi_4 = (\xi_{4,1}, \xi_{4,2}) = (5;4)$; $\xi_5 = (\xi_{5,1}, \xi_{5,2}) = (7;4)$. A mérések eredményét az 1. ábra mutatja. ξ várható értékét a mérések átlagával fogjuk becsülni, tehát

$$m = E(\xi) = \left(E(\xi_{.,1}), E(\xi_{.,2})\right) = \left(\frac{1}{5}\cdot\sum_{i=1}^{5}\xi_{i,1}, \frac{1}{5}\cdot\sum_{i=1}^{5}\xi_{i,2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\cdot(3+4+5+5+7), \frac{1}{5}\cdot(1+3+2+4+4)\right) = (4{,}8;\ 2{,}8)$$



1. ábra: A megfigyelések ábrázolása

Most összefoglaljuk a ξ szimbólumok indexének jelentését. Az első mérési adatot ξ_1 jelenti, ami önmagában egy kétdimenziós vektormennyiség. A mérések által reprezentált vektor-valószínűségi változó *i*-edik komponensét $\xi_{.,i}$ jelöli. Ily módon $\xi = (\xi_{.,1}, \xi_{.,2})$, és például $\xi_{4,2}$ a negyedik mérési adat második vektorkomponense. További példaként $\xi_3 = (\xi_{3,1}, \xi_{3,2}) = (5;2)$. A mintáink kovarianciamátrixa:

$$\mathbf{V} = \mathrm{cov}(\xi,\xi) = \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(\xi_{.,1},\xi_{.,1}) & \mathrm{cov}(\xi_{.,1},\xi_{.,2}) \\ \mathrm{cov}(\xi_{.,2},\xi_{.,1}) & \mathrm{cov}(\xi_{.,2},\xi_{.,2}) \end{bmatrix}.$$

A várható érték kiszámításából tudjuk, hogy $E(\xi_{.,1}) = 4{,}8$ és $E(\xi_{.,2}) = 2{,}8$. A kovariancia-mátrix többi komponensére:

$$E(\xi_{.,1}\cdot\xi_{.,1}) = E(\xi_{.,1}^2) = \frac{1}{5}\cdot(3^2+4^2+5^2+5^2+7^2) = 24{,}8$$

$$E(\xi_{.,1}\cdot\xi_{.,2}) = E(\xi_{.,1}\cdot\xi_{.,2}) = E(\xi_{.,2}\cdot\xi_{.,1}) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot(3\cdot1+4\cdot3+5\cdot2+5\cdot4+7\cdot4) = 14{,}6$$

$$E(\xi_{.,2}\cdot\xi_{.,2}) = E(\xi_{.,2}^2) = \frac{1}{5}\cdot(1^2+3^2+2^2+4^2+4^2) = 9{,}2.$$

Ezek alapján:

$$\mathrm{cov} = (\xi_{.,1},\xi_{.,1}) = E(\xi_{.,1}\cdot\xi_{.,1}) - E(\xi_{.,1})\cdot E(\xi_{.,1}) =$$

$$= 24{,}8 - 4{,}8\cdot4{,}8 = 1{,}76$$

$$\mathrm{cov} = (\xi_{.,1},\xi_{.,2}) = E(\xi_{.,1}\cdot\xi_{.,2}) - E(\xi_{.,1})\cdot E(\xi_{.,2}) =$$

$$= 14{,}6 - 4{,}8\cdot2{,}8 = 1{,}16$$

$$\mathrm{cov} = (\xi_{.,2},\xi_{.,2}) = E(\xi_{.,2}\cdot\xi_{.,2}) - E(\xi_{.,2})\cdot E(\xi_{.,2}) =$$

$$= 9{,}2 - 2{,}8\cdot2{,}8 = 1{,}36$$

Így a kovarianciamátrix:

$$\mathbf{V} = \mathrm{cov}(\xi,\xi) = \begin{bmatrix} 1{,}76 & 1{,}16 \\ 1{,}16 & 1{,}36 \end{bmatrix}.$$

Ettől a ponttól kezdve a számolási feladatban minden eredményt 4 tizedes jegyre fogunk kerekíteni.

Számoljuk ki most a kovarianciamátrix sajátértékeit! Ehhez a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\det(\lambda\cdot\mathrm{I} - \mathrm{V}) = 0$$

Kifejtve:

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1{,}76 & 1{,}16\\ 1{,}16 & 1{,}36\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1{,}76 & -1{,}16\\ -1{,}16 & \lambda-1{,}36\end{bmatrix}\right) =$$

$$= (\lambda-1{,}76)\cdot(\lambda-1{,}36) - 1{,}16^2 = \lambda^2 - 3{,}12\cdot\lambda + 1{,}048 = 0$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva kapjuk, hogy

és $\lambda_1 = 2{,}7371$ és $\lambda_2 = 0{,}3829$.

Ennek értelmezésénél azt mondhatjuk, hogy a később meghatározandó sajátvektorok közül az első „jóval fontosabb" lesz a megfigyelésből származó adatok előállításában, mint a második. Erre a sajátértékek aránya utal.

A következő lépés a fenti sajátértékekhez tartozó sajátvektorok meghatározása. Ehhez általánosságban a következő egyenletet kell megoldanunk az u sajátvektorra:

$$V \cdot u = \lambda \cdot u$$

Esetünkben λ_1-re ez a következőképpen fest:

$$\begin{bmatrix} 1{,}76 & 1{,}16 \\ 1{,}16 & 1{,}36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 2{,}7371 \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

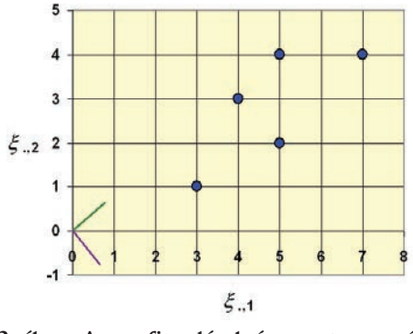
Az egyenlet megoldása nem egyértelmű; a következő eredményre vezet:

$$u_1 = 1{,}1872 \cdot u_2$$

u_2-t szabadon megválaszthatjuk; legyen az értéke 1. Ekkor a λ_1-hez tartozó egyik sajátvektor: $v_1 = (1{,}1872;1)$. Hasonló módon a λ_2-höz tartozó egyik sajátvektor: $v_2 = (1;-1{,}1872)$. Ezek a sajátvektorok ortogonálisak ugyan, de nem normáltak. Ha normáljuk őket, akkor a következőket kapjuk:

$v_1 = (0{,}7648;0{,}6442)$ és $v_2 = (0{,}6442;-0{,}7648)$

Így tehát megkaptuk a V kovarianciamátrix sajátértékeit és ortonormált sajátvektorait (lásd 2. ábra).



2. ábra: A megfigyelések és az ortonormált sajátvektorok

Határozzuk most meg az eredeti

$$\xi = \sum_{i=1}^{2} \tau_i \cdot v_i + m$$

valószínűségi változónk előállításában szereplő $\tau_i = v_i^T \cdot \xi^*$ skalár valószínűségi változóknak a megfigyelésből származó vektorokhoz tartozó értékeit néhány esetben! Figyeljünk az elméleti képletekben használt szimbólumok indexeinek alakulására a gyakorlatban!

$$\tau_{1,1} = v_1^T \cdot \xi_1^* = [0{,}7648 \quad 0{,}6442] \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4{,}8 \\ 2{,}8 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= [0{,}7648 \quad 0{,}6442] \cdot \begin{bmatrix} -1{,}8 \\ -1{,}8 \end{bmatrix} = -2{,}5362$$

(τ indexének első számjegye az első mérésre, a második számjegye pedig a kétdimenziós mérési adat első komponensére utal. Így a $\tau_{i,j}$ jelölésnél a jelenlegi feladatban i=1, 2, 3, 4, 5 és j=1, 2. ξ_1^*-ot pedig úgy kapjuk, hogy az első mérési adatból, tehát $\xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}) = (3;1)$-ből kivonjuk m-et, tehát (4,8;2,8)-at. A ξ_i^* jelölésnél i=1, 2, 3, 4, 5 szintúgy.)

Hasonlóan:

$$\tau_{1,2} = v_2^T \cdot \xi_1^* = [0{,}6442 \quad -0{,}7648] \cdot \begin{bmatrix} -1{,}8 \\ -1{,}8 \end{bmatrix} = 0{,}2171$$

A gyakorlati példára érvényes, módosított indexű

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{2} \tau_{i,j} \cdot v_j + m$$

képlet szerint az első mérésünk így állítható elő:

$$\xi_1 = (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}) = \tau_{1,1} \cdot v_1 + \tau_{1,2} \cdot v_2 + m =$$

$$= -2{,}5362 \cdot (0{,}7648;0{,}6442) + 0{,}2171 \cdot (0{,}6442;-0{,}7648) + (4{,}8;2{,}8) =$$

$$= (3{,}0002;1{,}0001),$$

ami a kerekítési hibáktól eltekintve tökéletes eredmény, hiszen (3;1)-nek kellett (volna) kijönnie.

Ha ξ_1-et pusztán az első sajátvektorral kívánjuk előállítani (a másodikat egyszerűen elhagyjuk, hiszen ez λ_2 értéke szerint sokkal kevésbé fontos, mint az első), akkor a következő közelítést kapjuk:

$$\xi_1 \approx \tau_{1,1} \cdot v_1 + m = -2{,}5362 \cdot (0{,}7648;0{,}6442) + (4{,}8;2{,}8) =$$

$$= (2{,}8603;1{,}1662)$$

Közelítsük a ξ valószínűségi változó többi értékét is pusztán egy sajátvektorral! A főkomponensek értékei a következők lesznek:

$$\tau_{2,1} = v_1^T \cdot \xi_2^* = [0{,}7648 \quad 0{,}6442] \cdot \begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = -0{,}4830$$

$$\tau_{3,1} = v_1^T \cdot \xi_3^* = [0{,}7648 \quad 0{,}6442] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} = -0{,}3624$$

$$\tau_{4,1} = v_1^T \cdot \xi_4^* = [0{,}7648 \quad 0{,}6442] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 1{,}2 \end{bmatrix} = 0{,}9260$$

$$\tau_{5,1} = v_1^T \cdot \xi_5^* = [0{,}7648 \quad 0{,}6442] \cdot \begin{bmatrix} 2{,}2 \\ 1{,}2 \end{bmatrix} = 2{,}4556$$

Maguk a közelítések:

$$\xi_2 \approx \tau_{2,1} \cdot v_1 + m = -0{,}4830 \cdot (0{,}7648;0{,}6442) + (4{,}8;2{,}8) =$$

$$= (4{,}4306;2{,}4889)$$

$$\xi_3 \approx \tau_{3,1} \cdot v_1 + m = -0{,}3624 \cdot (0{,}7648;0{,}6442) + (4{,}8;2{,}8) =$$

$$= (4{,}5228;2{,}5665)$$

$$\xi_5 \approx \tau_{5,1} \cdot v_1 + m = 2{,}4556 \cdot (0{,}7648;0{,}6442) + (4{,}8;2{,}8) =$$

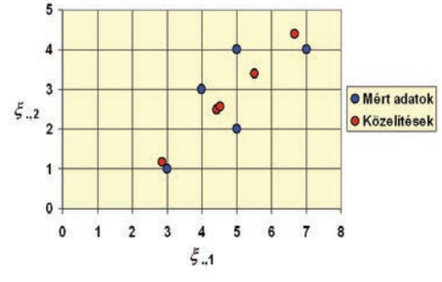
$$= (6{,}6780;4{,}3819)$$

$$\xi_4 \approx \tau_{4,1} \cdot v_1 + m = 0{,}9260 \cdot (0{,}7648;0{,}6442) + (4{,}8;2{,}8) =$$

$$= (5{,}5082;3{,}3965)$$

Az egyetlen sajátvektorral történő közelítés eredménye a 3. ábrán látható.

A főkomponens-analízis a színtan művelőitől sem idegen technika. A nappali sugárzás-eloszlások korszakalkotó tanulmányában is ezt alkalmazták [2], továbbá valós minták előállításához szükséges sajátvektorok minimális számát is ezzel a módszerrel elemezték igényesen [3]. Az eredeti mintáknak a karakterisztikus vektorokból történő előállításáról a [4], az átlagvektor szerepéről pedig az [5] publikációban tájékozódhat az olvasó.

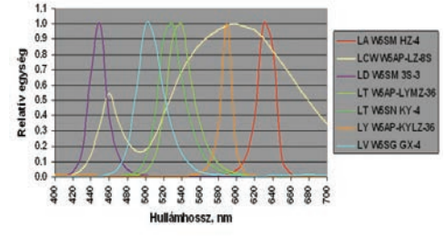


3. ábra: A megfigyelések és azok közelítése egyetlen sajátvektorral (és a várható értékkel)

3. Optimalizáció nagyszámú mintával

Ebben a tanulmányban az optimalizáció feladata az, hogy megtalálja azokat a LED-eket, amelyek színképéből alkotott eredő eloszlással valós izzólámpát helyettesíthetünk. A valós izzólámpa spektrumát két darab, fénydobozba szerelt 25 W-os izzólámpa nyújtotta. A feladathoz LED-es adatbázisból hét, a valóságban is létező OSRAM LED-típus színképét választottuk ki úgy, hogy azok a látható színképtartomány elegendően nagy részét fedjék le, de legyen közöttük valamilyen fehér LED is, hiszen ez a színkép összeállításánál sokszor előnyt jelent. A LED-ek relatív színképi teljesítményeloszlásait és típusait a 4. ábra mutatja.

A mintahalmazt Munsell-minták spektrális visszaverési tényezőiből állítottuk össze. A halmazba 373 mintát válogattunk össze szisztematikusan. A tanulmányban valamennyi színképi eloszlás értelmezési tartománya 400 nm – 700 nm, a lépésköz pedig minden esetben 10 nm.



4. ábra: Az optimalizációhoz használt hét LED relatív spektrális teljesítményeloszlása és típusa

Ezek után jelölje $S_{LED\#1}$, $S_{LED\#2}$, ..., $S_{LED\#7}$ a hét LED relatív spektrális teljesítményeloszlását. Jelölje w_1, w_2, ..., $w_7 \geq 0$ az egyes LED-ek súlyát az eredő S_M színképben, amelyre

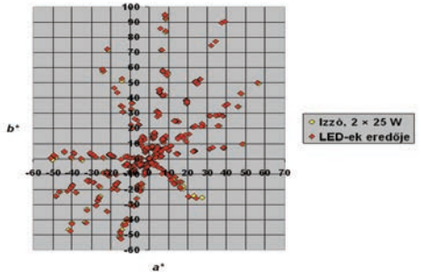
$$S_M = \sum_{i=1}^{7} w_i S_{LED\#i}$$

Jelölje $\Delta E_{ab,j}^*$ a j-edik Munsell-mintára számítható CIELAB színkülönbséget az izzólám-

pák, illetve S_M alatt. Jelölje $\overline{\Delta E^*_{ab}}$ a Munsell-minták átlagos színkülönbségét, azaz

$$\overline{\Delta E^*_{ab}} = \frac{1}{373}\sum_{j=1}^{373} \Delta E^*_{ab,j}$$

Az optimalizációs feladat úgy hangzik, hogy találjuk meg azokat a $w_1, w_2, \ldots, w_7 \geq 0$ értékeket, amelyekre $\overline{\Delta E^*_{ab}}$ minimális. (A konkrét optimalizációnál amiatt, hogy relatív spektrális teljesítményeloszlásokkal dolgozunk, az egyik súlyt rögzítenünk kell. Mi a fehér LED esetében ($S_{LED\#2}$) w_2=1-et választottunk.)

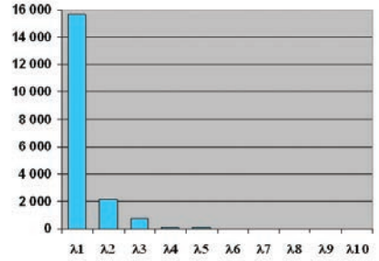


5. ábra: A 373 Munsell-minta elhelyezkedése a CIELAB rendszer a*b* síkján a CIE A eloszlás ill. az S_M eredő színkép alatt

A 373 Munsell-mintára fölírt költségfüggvény minimalizálása az I. táblázatban szereplő eredményt adja. Az Munsell-minták elhelyezkedése a CIELAB rendszer a*b* síkján a 6. ábrán hasonlítható össze a két eloszlás alatt.

4. Optimalizáció sajátvektorokkal

A tanulmány következő lépéseként meghatároztuk a 373 Munsell-minta kovariancia-mátrixának sajátértékeit és ortonormált sajátvektorait. (Az eljárás MATLAB-os környezetben egészen könnyen végrehajtható.) A 6. ábra az első 10 sajátérték ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{10}$) nagyságát hisztogramszerűen szemlélteti. Jól látható, hogy az első három sajátérték mellett a többi szinte eltörpül. A 7. ábrán ugyanezeket a sajátértékeket szemléltetjük, de az első három nélkül.



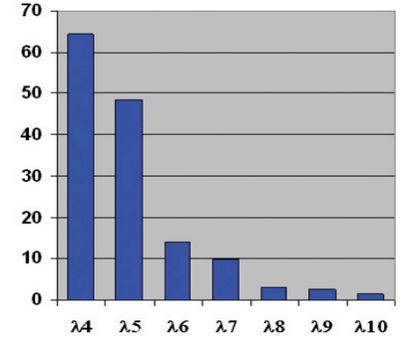
6. ábra: A 373 Munsell-minta főkomponens-analízise során kapott sajátértékek

	373 Munsell-minta	10 absztrakt eloszlás	8 absztrakt eloszlás	6 absztrakt eloszlás	4 absztrakt eloszlás
LED-típus	**Súly (w_i)**	**Súly (w_i)**	**Súly (w_i)**	**Súly (w_i)**	**Súly (w_i)**
LA W5SM HZ-4	2,568	2,635	2,691	2,791	10,972
LCW W5AP-LZ-8S	1	1	1	1	1
LD W5SM 3S-3	0	0	0	0	0,959
LT W5AP-LYMZ-36	0,217	0,301	0,32	0,355	2,033
LT W5SN KY-4	0	0	0	0	0
LY W5AP-KYLZ-36	0,958	0,868	0,913	0,994	7,201
LV W5SG GX-4	0,36	0,254	0,255	0,255	1,584
Átlagos ΔE^*_{ab}	0,32	0,43	0,43	0,43	0,79
Maximális ΔE^*_{ab}	3,47	3,17	3,2	3,23	4,95
$\Delta E^*_{ab,i}$ szórása	0,37	0,5	0,49	0,48	0,88

I. táblázat: A 373 Munsell-mintára ill. a 10, 8 és 6 absztrakt eloszlásra fölírt optimalizáció megoldása és jellemzői

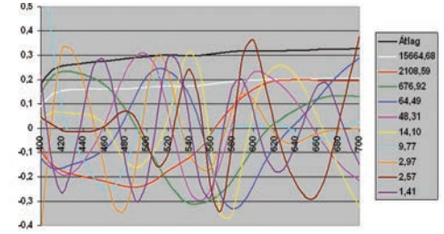
A továbbiakban az első 10 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat vesszük szemügyre. Ez a választás most esetleges; annak eldöntése, hogy hány sajátvektort ildomos megtartanunk, további mélyebb elemzést igényel.

A sajátvektor szó a színtani vonatkozás miatt éppen úgy spektrális visszaverési tényezőként értelmezendő, mint ahogyan azokkal az eredeti Munsell-mintákat jellemezzük.



7. ábra: A 373 Munsell-minta főkomponens-analízise során kapott sajátértékek az első három nélkül

A 8. ábra az első 10 sajátértékhez tartozó sajátvektort és az átlagos eloszlást mutatja. Ha megfigyeljük a 8. ábrán bemutatott sajátvektorokat mint absztrakt spektrális visszaverési tényezőket, azonnal föltűnik, hogy a második legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektortól kezdve mindegyik felvesz negatív értékeket is. A színtanban a valós minták spektrális visszaverési tényezői azonban kizárólag nemnegatív függvények lehetnek. A napjainkban használatos színtereket ilyen mintahalmazokra dolgozták ki. Kérdés tehát, hogy a negatív értékeket is fölvevő sajátvektorokra vagy absztrakt eloszlásokra miféle optimalizációs függvényt lehet megfogalmazni.



8. ábra: A 373 Munsell-minta főkomponens-analízise során kapott első 10 sajátvektor és az átlagos eloszlás

4.1 Színtér kiterjesztése

A negatív értékeket is felvevő absztrakt eloszlásokkal szembesülve úgy határoztunk, hogy egyszerűen olyan színteret keresünk, amelynek formulái legalább matematikailag értelmezettek negatív számokra is. Az amúgy közkedvelt és jól bevált CIELAB-rendszer pont ilyen, ami a köbgyökös formuláknak köszönhető:

$$L^* = 116 \cdot \left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}} - 16 \qquad a^* = 500 \cdot \left(\left(\frac{X}{X_n}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$b^* = 500 \cdot \left(\left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{Z}{Z_n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

Sok más színtérben az esetleges negatív színinger-összetevők (X, Y, Z) miatt csakugyan leküzdhetetlen nehézségeink támadnának, a fenti képletek azonban gond nélkül működnek, így a CIELAB-rendszerben definiált ΔE^*_{ab} színkülönbséget az eredeti módon használhatjuk.

4.2 Az új optimalizációs függvény

A 3. fejezetben megalkotott

$$\overline{\Delta E^*_{ab}} = \frac{1}{373}\sum_{j=1}^{373} \Delta E^*_{ab,j}$$

költségfüggvényt a fentiek tükrében a következőképpen módosítjuk.

Tudjuk, hogy az egyes valós minták sajátvektorokból történő előállításánál csak néhány sajátvektor tekinthető igazán fontosnak. Erről a sajátértékek nagysága informál bennünket. Cselekedjünk hát úgy, hogy az új költségfüggvényt a sajátvektorokra vonatkozó színkü-

lönbségekből építjük föl, de mivel azok nem egyenrangúak a minták előállításánál, a színkülönbségeket szorozzuk meg a fontosság eddigi mérőszámának tekintett sajátértékekkel. Így a következő költségfüggvényt kapjuk:

$$\overline{\Delta E^*_{ab}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \Delta E^*_{ab,j}$$

Az új optimalizációs függvény, amely – még egyszer hangsúlyozzuk – 373 helyett mindösszesen csak n eloszlást tartalmaz (a tanulmányban $n \leq 10$), az I. táblázatban összefoglalt eredményre vezet. Látható, hogy az új költségfüggvénnyel végrehajtott optimalizáció a 373 minta esetében elérthez nagyon közeli megoldást talál tíz, nyolc, de még hat sajátvektor, azaz absztrakt eloszlás esetén is. A táblázatból az is jól látszik, hogy négy absztrakt spektrális eloszlás viszont még nem elegendő.

A tanulmányban foglaltakhoz számos kiegészítés található Hanák Barbara szakdolgozatában [7].

5. Gyakorlati megvalósítás

Elméleti eredményeinket a gyakorlatba is át kívántuk ültetni. Mielőtt azonban valós LED-modul fizikai megvalósításán kezdtünk volna gondolkodni, megvizsgáltuk, hogy mi történik, ha az I. táblázatban szereplő öt, az optimalizáció szerint szükséges LED-típusból elhagyunk egyet vagy kettőt. Némi kombinatorikus optimalizáció után kiderült, hogy pusztán három LED-típussal is érdemes próbálkoznunk. Ezt az állítást támasztja alá a II. táblázat.

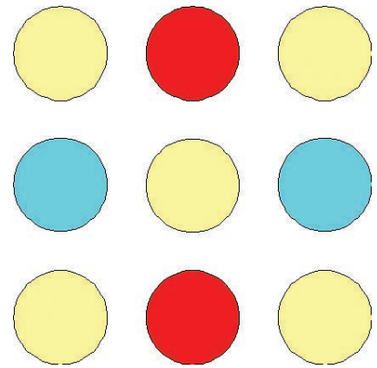
	373 Munsell-minta	10 absztrakt eloszlás
LED-típus	Súly (w_i)	Súly (w_i)
LA W5SM HZ-4	2,005	1,866
LCW W5AP-LZ-8S	1	1
LV W5SG GX-4	0,256	0,221
Átlagos ΔE^*_{ab}	0,57	0,6
Maximális ΔE^*_{ab}	3,65	4,28
$\Delta E^*_{ab,i}$ szórása	0,6	0,72

II. táblázat: A 373 Munsell-mintára ill. a 10 absztrakt eloszlásra fölírt optimalizáció megoldása és jellemzi 3 LED-típus esetén.

A három LED-típust igénylő megoldás azzal a reménnyel is kecsegtetett, hogy könnyebben megvalósítható lesz a LED-ek geometriai elrendezése a modulban a közel egyenletes térbeli fényeloszlás érdekében.

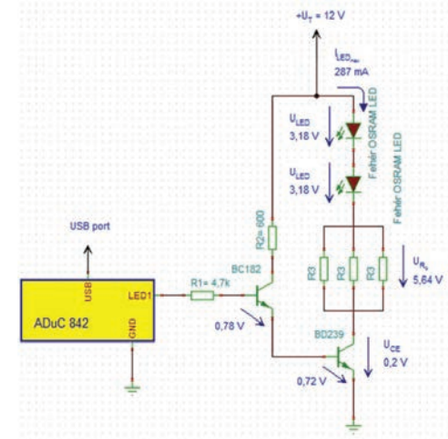
5.1 A LED-modul

A gyakorlati megvalósításra szánt három LED-típus bemérése nyilvánvalóvá tette, hogy jóval több melegfehér LED-re lesz szükségünk, mint vörösre vagy türkizre. A rendelkezésünkre álló LED-ek száma és a geometriai elrendezésre vonatkozó megfontolásaink ahhoz a megoldáshoz vezettek, amelyet a 9. ábra szemléltet. A felhasznált melegfehér LED-ek egyikét a 10. ábra mutatja.



9. ábra: A LED-típusok száma és elrendezése a modulban

10. ábra: A felhasznált melegfehér OSRAM LED-ek egyike



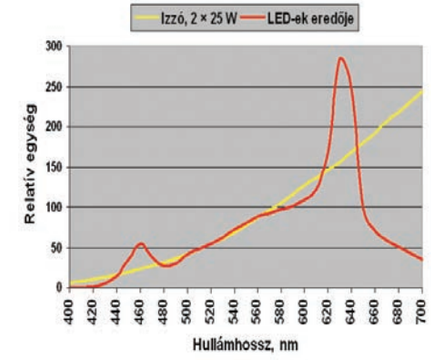
11. ábra: Az egyik LED-párt meghajtó áramkör kapcsolási rajza

A megalkotott LED-modul meghajtását mikrovezérlővel oldottuk meg (Analog Devices 842). Az egyes LED-típusok laptopról vezérelhetők külön-külön, 200 diszkrét fokozattal. Az áramellátást egy VOLTCRAFT VSP 2206 HE típusú labortápegység biztosította. A LED-típusok hűtését kizárólag a modul hátfalát képező fémlemezre bíztuk, így a LED-ek maximális áramát 300 mA-ra korlátoztuk. A tényleges áramköri kapcsolás nagyon egyszerű, a LED-eket jellemzően kettesével hajtjuk meg Darlington-kapcsolással. A mikrovezérlő egyik kimeneti portjának egy-egy lábával egy univerzális erősítőtranzisztort (BC 182) nyitunk ki, amely kivezérli az ahhoz kapcsolt teljesítménytranzisztort (BD 239). A 4 db LED-pár és a maradék egy fehér LED összességében öt csatornát foglal le a felhasználható nyolcból. A mikrovezérlőre írt program és az impulzusszélesség-moduláció megvalósítása Rumpler Mihály szakdolgozatában [8] tanulmányozható.

5.2 A fénydoboz

A behuzalozott modult kétkamrás fénydoboz egyik kamrájába szereltük be. Mivel ez az elrendezés más volt, mint amikor a LED-eket egyesével mértük be, újra bevizsgáltuk a LED-típusokat, de úgy, hogy az azonos típusúak mindig egyszerre üzemeltek. Az Ocean Optics USB 2000+ spektroradiométerünket a fénydoboz megvilágított felületére, annak közepére állítottuk a belépőrésre csavart diffúzorral felfelé, a LED-modul felé célozva. A mérés során vizsgáltuk az egyes LED-füzérek egymáshoz képesti sugárzott teljesítményét és a mikrovezérlővel előállított vezérlőjelek kitöltési tényezőjének hatását a sugárzott teljesítményre. Ez utóbbi szerencsére igen jó közelítéssel lineárisnak bizonyult.

A fénydobozban végzett mérések alapján már meg tudtuk határozni, hogy melyik LED-füzért mekkora kitöltési tényezővel hajtsuk meg a modulban. A fénydoboz másik kamrájába szerelt 2 db 25 W-os izzólámpa a saját kamrájának megvilágított felületén 420 lx megvilágítást produkált, így a LED-ek oldalán is ezt kívántuk elérni. A LED-modul és a két izzó spektrumát a 12. ábra mutatja.



12. ábra: A fénydobozba szerelt 2 db 25 W-os izzólámpa és a LED-modul színképe

Végezetül apróbb tárgyakat gyűjtöttünk össze, mindegyikből kettőt-kettőt, s ezeket elhelyeztük a fénydobozban. A 13. és 14. ábra az izzólámpákkal, ill. a LED-modullal megvilágított tárgyakat mutatja. A LED-

modul esetében a vizuális egyezés feltűnően jól sikerült, és a fényképek is erős egyezést mutatnak, pedig tudni kell, hogy a digitális fényképezőgépek színképi érzékenysége nem azonos a CIE színinger-megfeleltető függvényekkel, így akár nagyobb különbségekre is számíthattunk volna a jelenet megörökítésekor.

13. ábra: Bal oldalon csak a melegfehér (2 988 K) LED-ek, jobb oldalon az izzólámpák világítanak

14. ábra: Bal oldalon a behangolt LED-modul, jobb oldalon a 2 db 25 W-os izzólámpa világít

15. ábra: Csendélet a fénydobozban. Bal oldalon a LED-modul, jobb oldalon a két izzólámpa világít. A kamrák közepén E_v = 420 lx

6. Összefoglalás

Ha LED-es lámpát akarunk tervezni, és különös hangsúlyt fektetünk annak spektrális összetételére, akkor már csupán néhány LED-típus megfelelő megválasztásával is kiváló tulajdonságú fényforrásokat készíthetünk. A LED-típusok kiválasztására alkalmazott optimalizációban terjedelmes mintahalmazok helyett használhatjuk azok maroknyi karakterisztikus eloszlásait, amelyeket főkomponens-analízissel nyerhetünk. Ez összehasonlíthatatlanul kisebb gépidőt igényel, és gyakorlatilag ugyanahhoz vagy további ekvivalens eredményhez vezet. Az elméleti számítások helyességét a gyakorlati megvalósítás igazolja.

Köszönetnyilvánítás

Ehelyütt szeretnénk köszönetet mondani Christoph Neureuthernek, az OSRAM cég munkatársának, aki megajándékozott bennünket a minta-LED-ek készletével. További köszönet illeti Mészáros Imrét (Hasenegger), aki LED-lámpát adományozott oktatási célra; illetve Vass Lászlót, aki egy speciális teljesítmény-LED-del tette ugyanezt.